Parcial de Lógica

Lógica y Computabilidad

Curso de verano 2021

- El parcial tiene una duración de 4 horas y 15 minutos. No corregiremos exámenes que lleguen después de la hora (21:15), a menos que el retraso se deba a circunstancias de fuerza mayor, bajo lo cual se comprometen a darnos aviso previo.
- Se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clases prácticas, clases teóricas y también pueden usar los ejercicios de las guías. Sean explícitos cuando citan algún resultado. Todas sus respuestas deben estar justificadas.
- Entregar cada ejercicio en archivos separados identificados de la siguiente manera: **Apellido-Nombre-LU-ejercicio**. Por favor, respetar el formato para mejor organización. Las soluciones deberán enviarse al siguiente correo: logicaycomputabilidad@gmail.com.
- Criterio de aprobación: dos ejercicios bien (B), o un ejercicio bien (B) y dos regulares (R). Criterio de promoción: al menos dos ejercicios bien (B) y un regular (R).

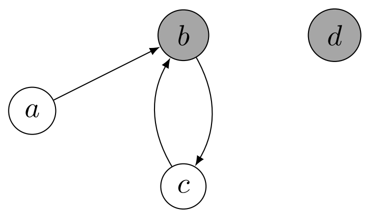
Ejercicio 1. Sea γ una fórmula proposicional del lenguaje $\{\neg, \rightarrow\}$ tal que ninguna de sus variables proposicionales aparece más de una vez. Demostrar que γ es una contingencia.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario $+$. Sea U la $\mathcal{L}$-estructura que tiene como dominio los números naturales y el símbolo $+$ se interpreta como la suma usual. Probar que el conjunto de los números naturales que tienen resto 2 en la división por 3 es definible.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{L} = \{G, B, E\}$ un lenguaje de primer orden, donde G y B son símbolos de relación unarios y E es un símbolo de relación binario. Una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$, se puede interpretar como un grafo con conjunto de aristas $E_{\mathcal{M}}$ y algunos vértices clasificados como tipo G (gris) o tipo B (blanco). Sea el sistema SQB que extiende la axiomatización SQ con las siguientes fórmulas:

B1 $(\forall x)\big(G(x) \vee B(x)\big)$
B2 $(\forall x)\big(G(x) \leftrightarrow \neg B(x)\big)$
B3 $(\forall x)(\forall y)\big((E(x,y)) \rightarrow (G(x) \wedge B(y)) \vee (G(y) \wedge B(x))\big)$

Demuestre que SQB es correcto y no completo respecto a la siguiente estructura $\mathcal{M}$ (Nota: en el siguiente gráfico el color del nodo indica de qué tipo es, i.e. $G_{\mathcal{M}} = \{b, d\}$ y $B_{\mathcal{M}} = \{a, c\}$.)



Julia
Rabinowicz

1) Inducción estructural

Caso base: $\gamma = p_i$

¿Qué es p_i? En el contexto de la materia se sabe que es una variable proposicional, pero hay que aclararlo.

γ contingencia si ~~existe~~ existen dos valuaciones v, v' tales que $v \models \gamma$ y $v' \not\models \gamma$ (ej. 4) práctica 4)

Defino $v : v(p_i) = 1 \Rightarrow v \models \gamma$

$v' : v'(p_i) = 0 \Rightarrow v' \not\models \gamma$

$\Rightarrow \gamma$ contingencia

Paso inductivo:

- $\gamma = \neg\alpha$ tal que en γ ninguna de sus variables proposicionales aparece más de una vez

Esto implica que en α ninguna variable proposicional aparece más de una vez ya que γ y α tienen las mismas variables, cada una con la misma cantidad de apariciones

$\Rightarrow \alpha$ contingencia por HI.

Faltan referencias de por qué esto vale

$\Rightarrow \exists\, v, v' : v \models \alpha$ y $v' \not\models \alpha$

$\Rightarrow v \not\models \neg\alpha$ y $v' \models \neg\alpha \Rightarrow \neg\alpha = \gamma$ es una contingencia

- $\gamma = \alpha \rightarrow \beta$ tal que en γ ninguna de sus variables aparece más de una vez

$\Rightarrow$ En α y en β ninguna variable aparece más de una vez y $Var(\alpha) \cap Var(\beta) = \emptyset$

$\Rightarrow \alpha$ y β contingencias por HI

$\Rightarrow \exists\, v, v', w, w' : v \models \alpha,\ v' \not\models \alpha,$
$w \models \beta,\ w' \not\models \beta$

Julia Rabinowicz

Por el ejercicio 4) b) de la práctica 4 vale que dados u, u' valuaciones y $\varphi \in FORM$

si $u(p_i) = u'(p_i)$ para todo $p_i \in Var(\varphi)$

$\Rightarrow u \models \varphi$ sii $u' \models \varphi$

$\Rightarrow$ Sea u : $u(p_i) = v(p_i)$ $\forall p_i \in Var(\alpha)$ y

$u(p_j) = w(p_j)$ $\forall p_j \in Var(\beta)$

¿u está bien definida? ¿Por qué? Lo mismo con u'.

$\Rightarrow u \models \alpha$ y $u \models \beta \Rightarrow u \models \alpha \to \beta$

Faltan referencias de por qué esto vale. Lo mismo en el caso de u'.

~~$\Rightarrow$ Sea u' : $u'(p_i) = v'(p_i)$ $\forall p_i \in Var(\alpha)$ y~~

~~$u'(p_i) = w'(p_i)$ $\forall p_i \in Var(\beta)$~~

~~$\Rightarrow u' \not\models \alpha$ y $u' \models \beta \Rightarrow u' \not\models \alpha \to \beta$~~

$\Rightarrow$ Sea u' : $u'(p_i) = v(p_i)$ $\forall p_i \in Var(\alpha)$ y

$u'(p_j) = w'(p_j)$ $\forall p_j \in Var(\beta)$

$\Rightarrow u' \models \alpha$ y $u' \not\models \beta \Rightarrow u' \not\models \alpha \to \beta$

$\Rightarrow \alpha \to \beta = \gamma$ es una contingencia

Faltaría concluir que como valen los casos base e inductivo, luego la propiedad vale para toda fórmula que no tiene variables proposicionales repetidas.

Julia
Rabinowicz

2) Quiero ver que existe una fórmula $\varphi(x)$ tal que para toda valuación v, $\mathcal{U} \models \varphi[v]$ sii x pertenece al conjunto

Veamos qué característica tienen los números que tienen resto 2 en la división por 3

Si $x = 3m+2$ para algún $m \in \mathbb{N}$

$(3m+2) \% 3 = 2$

$m=0 \quad x=2$
$m=1 \quad x=5$
$\vdots$

De esta forma obtenemos todos los x que cumplen la propiedad.

Defino las siguientes fórmulas: $\begin{pmatrix} +(a,b) = a+b \\ \neg(a=b) = a \neq b \end{pmatrix}$

$\varphi_0(x) = x + x = x$

$\varphi_1(x) = \forall y, z \left((\neg \varphi_0(y) \wedge \neg \varphi_0(z)) \to y + z \neq x \right)$

$\varphi_2(x) = \exists y, z \left((\varphi_1(z) \wedge \varphi_1(y)) \wedge y + z = x \right)$

Veamos que $\mathcal{U} \models \varphi_0[v]$ si $v(x) = 0$

Julia
Rabinowicz

$\mathcal{U} \models \varphi_0[v]$ sii $\mathcal{U} \models x+x=x\,[v]$ sii

$v(x)+v(x)=v(x)$ sea $k=v(x)$

$k+k=k$ y esto ocurre sii $k=0$.

Veamos que ~~[illegible]~~ $\mathcal{U} \models \varphi_1[v]$ sii $v(x)=1$

$\mathcal{U} \models \varphi_1[v]$ sii

$\mathcal{U} \models (\neg\varphi_0(y) \wedge \neg\varphi_0(z)) \rightarrow y+z \neq x\,[v(y=a, z=b)]$

$\forall a,b \in \mathbb{N}$

Sii $(v(y)\neq 0 \wedge v(z)\neq 0) \rightarrow v(y)+v(z) \neq v(x)$

Sii ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ $\forall a,b \in \mathbb{N}$

$(a\neq 0$ y $b\neq 0) \rightarrow a+b \neq v(x)$ y sii

$v(x)=1$ ya que la única forma de obtener 1

sumando dos naturales es $0+1$ ó $1+0$ y para los otros números siempre hay forma de ~~[illegible]~~ obtenerlos sumando otros dos $\neq 0$. $(n=(n-1)+1)$

Veamos que $\mathcal{U} \models \varphi_2[v]$ sii $v(x)=2$

$\mathcal{U} \models \varphi_2[v]$ sii $\mathcal{U} \models (\varphi_1(y) \wedge \varphi_1(z)) \wedge y+z=x\,[v(y=a, z=b)]$

Para algún $a,b \in \mathbb{N}$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Sii $(a=1$ y $b=1) \wedge a+b=v(x)$

Sii $v(x)=2$ ya que $1+1=2$.

Julia
Rabinowicz

Sea $\varphi(x) = \exists y, z \ (\varphi_2(z) \wedge y+y+y+z = x)$

Por lo dicho anteriormente $x \% 3 = 2$ sii

$x = 3m+2 = m+m+m+2$ para algún m

$U \models \varphi[v]$ sii $U \models \varphi_2(z) \wedge y+y+y+z = x \ [v(z=a, y=b)]$

para algún $a, b \in \mathbb{N}$

Sii ~~$\varphi_2 \ \varphi \ y+y+y+z=x$~~

$a=2$ y $b+b+b+a = v(x)$

Sii $v(x) = 3b+2$ para algún b

Sii $x \% 3 = 2$.

$\Rightarrow$ El conjunto es expresable mediante φ

Julia
Rabinowicz

3) Sea $C = \{ A$ L-estructura / $A \models SQB \}$

Por teorema de Completitud y Correctitud SQB es correcto y completo respecto a C (clase práctica 7)

Si $\mathcal{M} \in C \Rightarrow$ SQB es correcto respecto de $\mathcal{M}$

porque SQB es correcto respecto a C $\Rightarrow SQB \vdash \varphi$

$\Rightarrow \varphi$ es válida en cualquier modelo de C, en particular en $\mathcal{M}$ ($SQB \vdash \varphi \Rightarrow C \models \varphi \Rightarrow \forall A \in C$ y $\forall v$: valuación de A, $A \models \varphi[v]$) (clase práctica 7)

Veamos que $\mathcal{M} \in C$

$\mathcal{M} \in C$ si $\mathcal{M} \models SQB$ ($\forall \varphi \in SQB$, $\mathcal{M} \models \varphi$)

- Sea $\varphi \in SQB$, si $\varphi \in SQ$, como SQ es correcto respecto a la clase de todos los modelos, es correcto respecto a $\mathcal{M}$, entonces $\mathcal{M} \models \varphi$

Si $\varphi \notin SQ$, $\varphi = B1$ o $\varphi = B2$ o $\varphi = B3$

Veamos que $\mathcal{M} \models B1$ y $\mathcal{M} \models B2$ y $\mathcal{M} \models B3$

($\mathcal{M} \models \varphi$ si $\forall$ valuación de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi[v]$)

Julia
Rabinowicz

- $\mathcal{M} \models B1$

$\mathcal{M} \models (\forall x)\varphi[v]$ sii $\forall y \in U_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M} \models \varphi[v(x=y)]$

$\mathcal{M} \models G(x) \vee B(x)[v(x=y)]$ $\forall y \in U_{\mathcal{M}}$ sii

$G_{\mathcal{M}}(v(x))$ ó $B_{\mathcal{M}}(v(x))$ sii

$G_{\mathcal{M}}(y)$ ó $B_{\mathcal{M}}(y)$ $\forall y \in U_{\mathcal{M}}$

$U_{\mathcal{M}} = \{a, b, c, d\}$ $G_{\mathcal{M}} = \{b, d\}$ y $B_{\mathcal{M}} = \{a, c\}$

Si $y = a$ vale $B_{\mathcal{M}}(y)$

Si $y = b$ vale $G_{\mathcal{M}}(y)$

Si $y = c$ vale $B_{\mathcal{M}}(y)$

Si $y = d$ vale $G_{\mathcal{M}}(y)$

$\Rightarrow B1$ es válida en $\mathcal{M}$ ✓

- $\mathcal{M} \models B_2$

$G(x) \leftrightarrow \neg B(x) = G(x) \rightarrow \neg B(x)$ y $\underbrace{\neg B(x) \rightarrow G(x)}$ $\rightarrow \neg G(x) \rightarrow B(x)$

$\mathcal{M} \models G(x) \leftrightarrow \neg B(x)\, [v(x=y)]$ $\forall y \in U_{\mathcal{M}}$ sii

$G_{\mathcal{M}}(y) \leftrightarrow \neg B_{\mathcal{M}}(y)$ $\forall y \in U_{\mathcal{M}}$

Si $y = a$ $G_{\mathcal{M}}(y) \leftrightarrow \neg B_{\mathcal{M}}(y)$ vale porque no vale $G_{\mathcal{M}}(y)$ y no vale $\neg B_{\mathcal{M}}(y)$

Utilizando el mismo razonamiento podemos ver que para todos los elementos vale la propiedad (si son grises no son blancos y si no son grises son blancos)

$\Rightarrow B2$ es válida en $\mathcal{M}$ ✓

Julia
Rabinowicz

• $M \models B3$ sii

$M \models (E(x,y) \to (G(x) \wedge B(y)) \vee (G(y) \wedge B(x)))[v(x=e, y=f)]$

$\forall e,f \in U_M$

sii: $E_M(e,f) \to (G_M(e) \wedge B_M(f)) \vee$
$(G_M(f) \wedge B_M(e)) \quad \forall e,f \in U_M$

$E_M(e,f)$ vale para (a,b), (b,c) y (c,b)

• (a,b) : $G_M(b) \wedge B_M(a)$ vale

• (b,c) : $G_M(b) \wedge B_M(c)$ vale

• (c,b) : $G_M(b) \wedge B_M(c)$ vale

$\Rightarrow B_3$ es válido en M

$\Rightarrow M \in C \to$ SQB es correcto con respecto a M ✓

Julia
Rabinowicz

Veamos que SQB no es completo respecto de $\mathcal{M}$

Sea $\varphi = \exists x\ (\forall y\ (\neg E(x,y) \wedge \neg E(y,x)))$

Veamos que $\mathcal{M} \models \varphi$ ↳ hay un elemento del que no salen ni llegan aristas

$\mathcal{M} \models (\exists x)\ \psi\ [v]$ sii hay un $e \in U_{\mathcal{M}}$ tal que $\mathcal{M} \models \psi [v(x=e)]$

$\mathcal{M} \models \forall y\ (\neg E(x,y) \wedge \neg E(y,x))\ [v(x=e)]$ para algún $e \in U_{\mathcal{M}}$

sii

$\mathcal{M} \models \neg E(x,y) \wedge \neg E(y,x)\ [v(x=e, y=f)]$ $\forall f \in U_{\mathcal{M}}$ y para algún $e \in U_{\mathcal{M}}$

sii $\neg E_{\mathcal{M}}(e,f)$ y $\neg E_{\mathcal{M}}(f,e)$ $\forall f \in U_{\mathcal{M}}$ y para algún $e \in U_{\mathcal{M}}$

~~tomando e = d vale que~~

~~[illegible]~~

tomando $e = d$ vale ~~porque~~ lo anterior ya que $E_{\mathcal{M}}$ son las aristas y podemos ver que no hay aristas saliendo o entrando de d. ✓

$\Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi$

Julia
Rabinowicz

Sea A la siguiente estructura:

$B_A = \{a\}$

$G_A = \{b\}$

Es claro ver que todos los axiomas de SQB son válidos en A:

Con demostraciones análogas a las de M, podemos ver que B1 vale ya que para a vale $B_A(a)$ y para b vale $G_A(b)$, ~~[illegible]~~ B2 vale ya que vale $G_A(b)$ y no $\cancel{\neg} B_A(b)$ y no $\cancel{\neg} G_A(a)$ y $B_A(a)$ y B3 vale ya que $E_A(a,b)$ es la única arista y vale $G_A(b)$ y $B_A(a)$

Pero $A \not\models \varphi$ ya que ~~[illegible]~~ de a sale una arista y esa arista llega a b. ✓

Si SQB fuera completo respecto de M, como $M \models \varphi \Rightarrow$ $SQB \vdash \varphi$

Pero como SQB es correcto respecto de $A \Rightarrow A \models \varphi$

$\rightarrow$ Abs! ya vimos que $A \not\models \varphi$

El absurdo vino de suponer SQB completo respecto de M

$\Rightarrow$ SQB no es completo respecto de M ✓